МАТЕМАТИКА

УДК 517.983.23: 517.983.5

ОБРАЩЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ КОМБИНАЦИИ ЗНАЧЕНИЙ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ЗАМКНУТОГО ОПЕРАТОРА

А.Р. Миротин, А.А. Атвиновский

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель, Беларусь

INVERSION OF A LINEAR COMBINATION OF VALUES OF THE RESOLVENT OF A CLOSED OPERATOR

A.R. Mirotin, A.A. Atvinovskii

F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

Решается задача вычисления левого обратного к линейной комбинации значений резольвенты замкнутого оператора в банаховом пространстве. Сформулированы нерешенные задачи.

Ключевые слова: *замкнутый оператор, левый обратный оператор, резольвента, банахово пространство, функциональное исчисление, функция Маркова.*

The problem of the computation of the left inverse of a linear combination of values of the resolvent of a closed operator in a Banach space is solved. Several unsolved problems are formulated.

Keywords: *closed operator, left inverse of an operator, resolvent, Banach space, functional calculus, Markov function.*

Введение

Данная заметка посвящена решению следующей задачи. Рассмотрим рациональную функцию вида

$$f(z)=\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{\lambda_j-z}, \qquad (0.1)$$

где $n>1, c_j>0, \lambda_j\in\mathbb{R}\ (j=1,\dots,n),$ и пусть $a=\min\lambda_j,$ $b=\max\lambda_j$. Функция f нигде не обращается в нуль на множестве $\mathbb{C}\setminus[a,b],$ так как

$$f(z)=\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j(\lambda_j-x)}{\left|\lambda_j-\overline{z}\right|^2}+iy\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{\left|\lambda_j-\overline{z}\right|^2}.$$

Кроме того, очевидно, что функция (0.1) голоморфна на множестве $\mathbb{C}\setminus[a,b]$ и в бесконечности и имеет в бесконечности нуль первого порядка. Следовательно, если A – замкнутый плотно определенный оператор в комплексном банаховом пространстве X, спектр $\sigma(A)$ которого не пересекается с отрезком $[a,b],$ то в силу известного свойства голоморфного функционального исчисления [1, с. 643, теорема 9] оператор

$$f(A)=\sum_{j=1}^{n}c_jR(\lambda_j,A)$$

(здесь и ниже $R(\lambda,A)=(\lambda I-A)^{-1}$ – резольвента оператора A, I – единичный оператор в X) имеет левый обратный $f(A)^{-1}$. Основной результат данной работы дает способ его вычисления.

В связи с рассматриваемой задачей отметим, что условие $\sigma(A)\cap[a,b]=\varnothing$ существенно для левосторонней обратимости оператора $f(A),$ что видно из следующего тождества:

$$R(\lambda_1,A)+R(\lambda_2,A)=$$
$$=2R(\lambda_1,A)\left(\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}-A\right)R(\lambda_2,A).$$

1 Вспомогательные сведения

Нам понадобятся некоторые сведения о функциях классов $R[a,b]$ и $Q[a,b]$ и функциональном исчислении с символами из $Q[a,b]$ [2].

Пусть $a<b.$ Говорят, что функция g относится к классу $R[a,b],$ если она голоморфна в верхней полуплоскости, отображает ее в себя, а также голоморфна и положительна на $(-\infty,a)$ и голоморфна и отрицательна на $(b,+\infty)$ (функции этого класса называются функциями Маркова). Известно [3], что g можно единственным образом представить в виде

$$g(z)=\int_a^b\frac{d\tau(t)}{t-z},$$

где τ – ограниченная положительная борелевская мера, сосредоточенная на отрезке $[a,b]$ (представляющая мера).

Ясно, что $f\in R[a,b].$

Положим также

$$Q[a,b]=\{\varphi\mid\varphi=1/g,\quad g\in R[a,b]\}$$

(любая функция $g\in R[a,b]$ не обращается в нуль на $\mathbb{C}\setminus[a,b]$).

Если функция φ принадлежит классу $Q[a,b]$, то ее можно единственным образом представить в виде

$$\varphi(z)=\alpha+\beta z-h(z),$$

где $h\in R[a,b]$, интегралы, представляющие, $h(a)$ и $h(b)$, сходятся, а числа α и β удовлетворяют некоторым дополнительным условиям.

Следующая лемма дает способ вычисления этих чисел, если известна представляющая мера функции $1/\varphi$.

***Лемма* 1.1.** *Пусть функция* φ *принадлежит* $Q[a,b], \varphi=1/g, g\in R[a,b]$, τ *– представляющая мера для* g. *Тогда*

$$\beta=-\frac{1}{\tau([a,b])},\quad \alpha=\frac{1}{\tau([a,b])^2}\int_a^b t\,d\tau(t).$$

Доказательство. Выше было отмечено, что $\varphi(z)=\alpha+\beta z-h(z)$, где $h\in R[a,b]$, причем из очевидного равенства $\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=0$ вытекает, что коэффициенты α и β определяются следующим образом:

$$\beta=\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi(x)}{x},\quad \alpha=\lim_{x\to\infty}(\varphi(x)-\beta x).$$

Следовательно, $\beta=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}xg(x)}$. Применяя теорему Лебега об ограниченной сходимости, имеем

$$\lim_{x\to\infty}xg(x)=\int_a^b\lim_{x\to\infty}\frac{x}{t-x}d\tau(t)=-\tau([a,b]).$$

Далее,

$$\alpha=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{g(x)}+\frac{x}{\tau([a,b])}\right)=$$

$$=\frac{1}{\tau([a,b])}\lim_{x\to\infty}\frac{\tau([a,b])+\int_a^b\frac{x}{t-x}d\tau(t)}{\int_a^b\frac{d\tau(t)}{t-x}}=$$

$$=\frac{1}{\tau([a,b])}\lim_{y\to0}\frac{\tau([a,b])+\int_a^b\frac{d\tau(t)}{yt-1}}{y\int_a^b\frac{d\tau(t)}{yt-1}}.$$

Воспользовавшись равенством

$$\frac{1}{yt-1}=-\sum_{n=0}^{\infty}y^nt^n$$

и интегрируя степенной ряд почленно, получаем окончательно

$$\alpha=\frac{1}{\tau([a,b])}\lim_{y\to0}\frac{\tau([a,b])-\sum\limits_{n=0}^{\infty}y^n\int_a^b t^n d\tau(t)}{-\sum\limits_{n=0}^{\infty}y^{n+1}\int_a^b t^n d\tau(t)}=$$

$$=\frac{1}{\tau([a,b])^2}\int_a^b t\,d\tau(t).$$

Лемма доказана.

2 Основной результат

***Теорема* 2.1.** *Пусть функция f задана формулой* (0.1), A *– замкнутый плотно определенный оператор в комплексном банаховом пространстве* X, *спектр которого не пересекается с отрезком* $[a,b]$. *Тогда левый обратный к оператору* $f(A)$ *имеет вид*

$$f(A)^{-1}=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}c_j\lambda_j}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}c_j\right)^2}I-\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n}c_j}A-\sum_{k=1}^{n-1}a_kR(t_k,A),$$

где $t_k\,(k=1,\ldots,n-1)$ *– все нули функции f*,

$$a_k=\frac{1}{f'(t_k)}.$$

Доказательство. Как было сказано выше, если $\varphi=1/f$, то $\varphi(z)=\alpha+\beta z-h(z)$, где $h\in R[a,b]$. Пусть h имеет представляющую меру μ. В силу теоремы обращения из [2], левый обратный к оператору $f(A)$ есть $\varphi(A)$, т. е.

$$f(A)^{-1}=\alpha I+\beta A-\int_a^b R(t,A)d\mu(t). \qquad (2.1)$$

Так как функция f принадлежит классу $R[a,b]$ и имеет представляющую меру $\tau=\sum\limits_{i=1}^{n}c_i\delta_{\lambda_i}$, где δ_λ – мера Дирака, сосредоточенная в точке λ, то, воспользовавшись леммой 1.1, легко находим, что

$$\alpha=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n}c_j\lambda_j}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n}c_j\right)^2},\quad \beta=-\frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n}c_j}. \qquad (2.2)$$

Возможны два случая.

1) $a\ge0$. Применяя прием из [4], [5], введем функцию

$$F(\zeta):=h(-\zeta)=\int_a^b\frac{d\mu(t)}{t+\zeta}.$$

В рассматриваемом случае эта функция есть преобразование Стилтьеса меры μ, сосредоточенной на отрезке $[a,b]$. Поэтому, трактуя меру μ как обобщенную функцию, получаем в силу комплексной формулы обращения для преобразования Стилтьеса обобщенных функций [6, с. 70], что

$$\mu(t)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{y\to+0}(F(-t-iy)-F(-t+iy))=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}(h(t+i0)-h(t-i0))=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}(\varphi(t-i0)-\varphi(t+i0)).$$

Заметим, что функция f имеет $n-1$ нуль $t_k, k=1,\ldots,n-1$ (они являются корнями полинома степени $n-1$), причем, как было отмечено во введении, эти нули принадлежат $[a,b]$ и имеют кратность единица, поскольку

$$f'(t_k)=\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{(\lambda_j-t_k)^2}>0.$$

Следовательно, выделяя целую часть рациональной функции φ и разлагая ее дробную часть на простейшие дроби, получим

$$\varphi(z)=\alpha+\beta z+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{z-t_k},$$

где $a_k=\mathrm{res}_{z=t_k}\varphi(z)=1/f'(t_k)$. Используя формулы Сохоцкого [7, с. 32]

$$\frac{1}{x\pm i0}=\mp i\pi\delta(x)+P\frac{1}{x}$$

получаем теперь, что

$$\mu(t)=\frac{1}{2\pi i}(\varphi(t-i0)-\varphi(t+i0))=$$

$$\frac{1}{2\pi i}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{(t-t_k)-i0}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_k}{(t-t_k)+i0}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}a_k\delta(t-t_k)$$

(мы воспользовались несколько другим, чем раньше, обозначением меры Дирака, принятым в теории обобщенных функций). Осталось подставить полученные значения коэффициентов α,β и меры μ в формулу (2.1).

2) $a<0$. Рассмотрим функцию $f_1(z)=f(z+a)$. Если мы положим $\lambda'_j=\lambda_j-a, t'_k=t_k-a$, то

$$f_1(z)=\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{\lambda'_j-z},$$

причем t'_k $(k=1,...,n-1)$ – все нули этой функции. Ясно, что $f_1(A_1)=f(A)$, где $A_1:=A-aI$. Так как функция f_1 и оператор A_1 удовлетворяют условиям, наложенным на функцию и оператор в случае 1), то по доказанному выше

$$f(A)^{-1}=f_1(A_1)^{-1}=\frac{\sum_{j=1}^{n}c_j\lambda'_j}{\left(\sum_{j=1}^{n}c_j\right)^2}I-\frac{1}{\sum_{j=1}^{n}c_j}A_1-$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{f_1'(t'_k)}R(t'_k,A_1)=$$

$$=\frac{\sum_{j=1}^{n}c_j\lambda_j}{\left(\sum_{j=1}^{n}c_j\right)^2}I-\frac{1}{\sum_{j=1}^{n}c_j}A-\sum_{k=1}^{n-1}a_kR(t_k,A),$$

что и требовалось доказать.

Применяя теорию возмущений [8], из формулы (2.1) выводим такое

Следствие. *Если оператор $-A$ порождает ограниченную полугруппу класса C_0, то $f(A)^{-1}$ также обладает этим свойством.*

Замечания. Пусть

$$c_j>0,\ \sum_{j=i}^{\infty}c_j<\infty,\ \lambda_j\in\mathbb{R}\ (j=1,2,...),$$

и пусть $a=\inf\lambda_j>-\infty, b=\sup\lambda_j<\infty.$ Тогда функция $f(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j}{\lambda_j-z}$ принадлежит классу $R[a,b]$.

Как и выше, для любого замкнутого плотно определенного оператора A в комплексном банаховом пространстве X, спектр которого не пересекается с отрезком $[a,b]$, оператор $f(A)$ имеет левый обратный вида (2.1), где коэффициенты находятся по формулам, аналогичным формулам (2.2). Представляло бы интерес точное вычисление этого обратного (т. е. нахождение для этого случая представляющей меры μ). Было бы также интересно получить обобщение теоремы 2.1 на случай комплексных значений λ_j.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Данфорд*, *Н.* Линейные операторы. Т. 1. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. – М. : ИЛ, 1962. – 895 с.

2. *Атвиновский*, *А.А.* Об одном функциональном исчислении замкнутых операторов в банаховом пространстве / А.А. Атвиновский, А.Р. Миротин // Известия вузов. Математика. – 2013. – № 10. – С. 3–15.

3. *Крейн*, *М.Г.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М.Г. Крейн, А.А. Нудельман. – М. : Наука, 1973. – 552 с.

4. *Миротин*, *А.Р.* Обращение операторно монотонных функций негативных операторов в банаховом пространстве / А.Р. Миротин // Труды Института математики. Минск. – 2004. – Т. 12, № 1. – С. 104–108.

5. *Атвиновский*, *А.А.* Обращение одного класса операторов в банаховом пространстве и некоторые его применения / А.А. Атвиновский, А.Р. Миротин // Проблемы физики, математики и техники. – 2013. – № 3 (16). – С. 55–60.

6. *Брычков*, *Ю.А.* Интегральные преобразования обобщенных функций / Ю.А. Брычков, А.П. Прудников. – М. : Наука, 1977. – 286 с.

7. *Владимиров*, *В.С.* Обобщенные функции в математической физике / В.С. Владимиров. – М. : Наука, 1976. – 280 с.

8. *Като*, *Т.* Теория возмущений линейных операторов / Т. Като. – М. : Мир, 1972. – 740 с.

Работа выполнена при финансовой поддержке Атвиновского А.А. Грантом Министерства образования РБ для студентов, аспирантов и докторантов № 20140739.

Поступила в редакцию 06.06.14.